

Introduction :

Moment d'inertie par rapport à un axe (Δ) :

Par définition le moment d'inertie I_Δ, par rapport à un axe Δ, d'un point matériel de masse m située à une distance r de Δ est :

$$I_\Delta = mr^2$$

Un système de N points matériels de masses m_i, distants de r_i de l'axe Δ, aura pour moment d'inertie par rapport à Δ :

$$I_\Delta = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

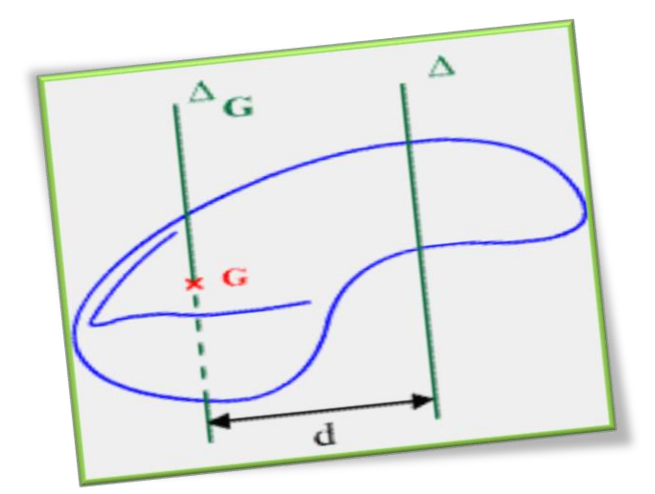
Dans le cas d'un corps solide constitué d'une infinité de points matériels, nous passerons à la limite suivante :

$$I_\Delta = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = \int r^2 dm$$

Moment d'inertie par rapport à un axe (Δ) parallèle à l'axe (Δ_G) qui passe par le centre de gravité :

Théorème de transport (ou Théorème d'Huygens ou Théorème de Steiner)

Théorème d'Huygens :



Le moment d'inertie d'un solide, par rapport à un axe (Δ), est égal au moment d'inertie de ce corps par rapport à un axe ΔG , parallèle à Δ, passant par le centre de gravité augmenté du produit Md^2 (M étant la masse du solide et d la distance entre les deux axes)

$$I_\Delta = I_{\Delta G} + Md^2$$

Par exemple pour le cylindre, le moment d'inertie par rapport à une de ses génératrices sera :

$$I_\Delta = I_{\Delta G} + Md^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

- **Moment d'inertie par rapport à un point :**

Le moment d'inertie d'un corps par rapport à un point O est égal à la demi-somme de ses moments d'inertie par rapports à trois axes perpendiculaires (Ox, Oy, Oz) passant par le point O.

$$I_O = (I_{Ox} + I_{Oy} + I_{Oz}) / 2$$

I-But du TP :

- Détermination de la constante de torsion d'un ressort spiral.
- Détermination du moment d'inertie d'un disque en fonction de la distance verticale de l'axe de rotation au centre de gravité.

II-Principe :

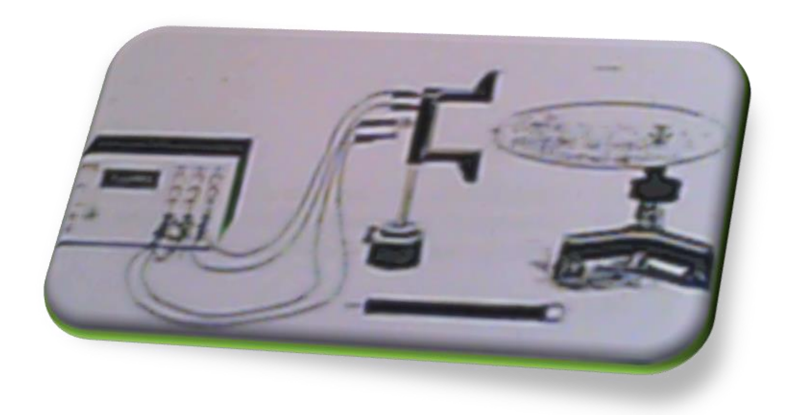
On mesure la durée des oscillations d'un disque circulaire qui effectue des mouvements oscillants de torsion autour de différents axes parallèles. On détermine le moment d'inertie du disque en fonction de la distance verticale de l'axe de rotation au centre de gravité.

III-Montage :

III-1 manipulation 1 :



III-2 manipulation 2 :



IV-Théorie et exploitation :

Définitions:

- **Couple :** soit F une force s'appliquant en un point M, on note $\vec{M} = \vec{OM} \wedge \vec{F}$ Le moment de F par le rapport au point O situé sur un axe Oz. Le couple Tz qu'exerce la force $\vec{F}$ par rapport à l'axe Oz désigne la projection de $\vec{M}$ sur l'axe : $T_z = \vec{M} \cdot \vec{K}$
- **Théorème du moment cinétique :** soit un solide tournant autour d'une point O, fixe dans un référentiel galiléen, On note $\vec{M}$ le moment par rapport à O de la résultante des

forces s'exerçant sur le solide et $\vec{L}$ le moment cinétique du solide par rapport à O.Le théorème du moment cinétique s'écrit : $\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}$

- **Moment d'inertie :** Le moment d'inertie I par rapport à un axe, d'un ensemble de N masses ponctuelles m_i(i=1,2,3…….,N) est défini par la relation : $I = \sum_{i=1}^{N} mr^2$

  Où r_i est la distance de la masse m_i à l'axe.

  Le moment d'inertie par rapport à un axe Oz , d'un solide de densité de masse par unité de volume $\rho(x, y, z)$ est donnée par : $I = \int_{solide} \rho(x, y, z)(x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz,$

- **Moment cinétique et vitesse angulaire :** Considérons un solide tournant à la vitesse angulaire Ω, autour d'un axe Oz fixe. Soit L le moment cinétique du solide par rapport au point O. On montre que la projection $\vec{L}.\vec{k}$ =Lz du moment cinétique L sur l'axe de rotation est donné par :

  $$Lz = I\Omega$$

  Où I est le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.

V-Questions :

- Dresser un tableau du moment du couple du ressort en fonction de l'angle de torsion, tracer la courbe correspondante et déduire la constante de torsion du ressort.
- Déterminer l'équation du mouvement et préciser la fréquence d'oscillation.
- a)-En utilisant le théorème d'Huygens, déterminer la composante suivant l'axe des z du tenseur d'inertie se rapportant à une origine décalée de d par rapport au centre de gravité.

  (b) -Dresser un tableau du carré de la durée d'oscillation T^2 en fonction de d^2 et tracer la courbe correspondante.

  (c) -Déduire de ce qui précède le moment d'inertie Iz et décrire la méthode utilisée.

  (d)- Conclure.

Réponses :

* 1ère expérience :

1). Le tableau du moment du couple du ressort et la force $\vec{F}$ en fonction de l'angle de torsion :

Avec $\mathbf{Tz = F.OM.\sin(\frac{\pi}{2})}$ et OM=d=14,5cm

L'angle φ	$\frac{\pi}{2}$			π			$\frac{3\pi}{2}$			2π		
F(N)	0,2	0,11	0,04	0,4	0,39	0,41	0,43	0,58	0,6	0,85	0,86	0,85
F moy(N)	0,11			0,4			0,53			0,85		
Tz(N.m)	0,015			0,058			0,076			0,123		
$\Delta Tz x 10^{-3}$	1,467			1,85			1,958			2,295		

On a :

$T_z = F.d.\sin\theta$ *On prend* $\theta = \pi/2$

Donc $\sin\theta = 1$

$T_z = F.d$

Donc : $\ln Tz = \ln F + \ln d$

$$\frac{\Delta Tz}{Tz} = \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta d}{d}$$

$$\Delta Tz = Tz(\frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta d}{d})$$

Avec :

$\Delta F = 0{,}01N$ $\Delta d = 1mm$ *d=14.5cm*

Et on a $\Delta ø = 5°$ *Donc* $\Delta\varphi = 0{,}08rad$

La courbe correspondante a ce tableau :

- ***Déduction de la constante de rotation D :***

➢ ***Calcul des pentes minimale et maximale :***

A partir de la courbe on a :

➢ $P_{max} = \frac{\Delta Tz}{\Delta\varphi} = \frac{(12,5-5,1).10^{-2}}{2\pi-\pi} =$ 0,0235N .M/rad

➢ $P_{min} = \frac{\Delta Tz}{\Delta\varphi} = \frac{(11,7-5).10^{-2}}{2\pi-\pi}$ = 0,0213N.M/rad

- Donc :

$$Pmoy = \frac{Pmax + Pmin}{2}$$

➢ P_{moy}= 0,0224N.M/rad

- Et l'incertitude de P est :

$$\Delta P = \frac{Pmax - Pmin}{2}$$

$\Delta P = 1,1.10^{-3}$

$P = P_{moy} \pm \Delta P$

$P = 0{,}0224N \pm 1{,}1.10^{-3} N.M/rad$

A partir de l'équation :

$$Tz = -D.\emptyset$$

Donc : $D = -(\frac{Tz}{\varphi})$

D est la pente de notre courbe :

D= $P_{moy} \pm \Delta P$

$D = 0{,}0224N \pm 1{,}1.10^{-3} N.M/rad$

2) on Détermine l'équation du mouvement et on précise la fréquence d'oscillation:

- Considérons le solide effectuant un mouvement d'oscillation de torsion autour de l'axe Oz .La position du solide à l'instant t est repéré par l'angle $\varphi(t)$ de rotation par rapport à la position d'équilibre. A chaque instant t, il est soumis au couple de rappel du ressort à spirale.On suppose que le couple de rappel Tz du ressort est proportionnel à l'angle de torsion φ.Le couple est la projection sur l'axe de rotation du moment de la force de rappel, on donc : $\mathbf{Tz = \overrightarrow{M}.\ \overrightarrow{K} = -D\varphi}$,

Où D est la constante de torsion qui est caractéristique du ressort spiral.L'unité de D est (N.m) La projection sur l'axe de rotation du moment cinétique $\vec{L}$ du solide est : $\mathbf{\vec{L}.\ \vec{K} = I\dot{\varphi}}$

- Le théorème du moment cinétique, projeté sur l'axe de rotation donne :

$$d\frac{\vec{L}}{dt}.\vec{K} = \vec{M}(\vec{F}).\vec{K} \Leftrightarrow I\ddot{\varphi} = -D\varphi$$

—> ((c'est l'équation du mouvement))

↓

$$\varphi + \frac{D}{I}\ddot{\varphi} = 0$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{D}{I}}$

Donc la période T d'oscillation de torsion est donnée par : $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$

Dont on peut conclure la fréquence.

Alors la fréquence d'oscillation : $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{D}{Iz}}}{2\pi}$

3)

a)- on détermine la composante suivant l'axe des z du tenseur d'inertie :

D'après L'équation du mouvement on a : $\mathbf{Iz = D\frac{T^2}{4\pi^2}}$

Car : $\boldsymbol{\omega}^2 = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{Iz}}$ Puisque $\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{2\pi}}{\mathbf{T}}$

Donc : $\frac{\mathbf{4\pi^2}}{\mathbf{T^2}} = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{Iz}}$ Alors : $\mathbf{Iz = \frac{DT^2}{4\pi^2}}$

b) *Tableau des mesures:

d (cm)	3			6			9			12		
T(s)	2.84	2.82	2.83	3.11	3.12	2.83	3.7	4.03	4.13	4.12	4.15	4.12
Tmoy (s)	2.83			3.02			3.95			4.13		
ΔT	0.01			0.09			0.08			0.01		
ΔT^2	0 .0566			0.5436			0.632			0.0826		

On a :

$$\Delta d=1mm$$

$$\Delta T^2=2\Delta T.T$$

$$\Delta T= \sup|Tmoy-Ti|$$

La courbe : $T^2=f(d^2)$:

On sait aussi que :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

 $T^2=\frac{4\pi^2}{D} \times I\Delta$

Et puisque : $I\Delta = I_z+md^2$

$$T^2= \frac{4\pi^2 Iz}{D} + \frac{4\pi^2 md^2}{D}$$

Pour d=0cm

$$T^2(0) = \frac{4\pi^2 Iz}{D}$$

Donc :

$Iz = \frac{DT^2(0)}{4\pi^2}$

- <u>A partir de la courbe :</u>

On a : $T^2(0) = \frac{7.1+7.6}{2} = 7.35s$

Donc : $Iz = 4.174.10^{-3} \pm 2.05 10^{-4}$

On a: $\Delta Iz = Iz(\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta T^2}{T})$ $\Delta T = 2\Delta T.T$

Selon le théorème de Huygens : $I_\Delta = I_{\Delta G} + md^2$

- Donc $T^2 = 4\pi^2 I_G/D + m.4\pi^2.d^2/D$

On a pour d = 0 : $T_0^2 = 4\pi^2 I_G/D$

- Donc $IG = \frac{DT^2}{4\pi}$

Pour d=0 ------→ To=2.5s

Et D= 0.0224 N.m/rad

Donc $Iz = 4.274.10^{-3} kg.m^2$

d-

On a pour R = 14.5 cm et m = 204 g $I_z' = m R^2$

On a $I_z' = 204.10^{-3}.(14.5.10^{-2})^2$ -------------→ $I'z = 4.28 10^{-3} kg.m^2$

$I_z \approx I'_z$

Donc on peux dire que le moment d'inertie est égale à : $m R^2$